

Solution de la question 1:

Les détails sont repris à la Figure 1.

A chaque noeud, la borne supérieure UB représente la meilleure valeur admissible trouvée jusque là (notée f^* dans l'algorithme du cours). La borne inférieure est la solution de la relaxation linéaire ($f(x_R^*)$ dans l'algorithme du cours).

Au noeud racine, comme nous n'avons pas encore obtenu de solution entière, la borne supérieure est $+\infty$ (voir étape 9 de l'algorithme du cours). La solution du problème relaxé est $x_1^* = 11/5$, $x_2^* = 8/5$. La solution graphique est illustrée sur la Figure 2.

Comme nous branchons sur x_1 , nous introduisons d'une part la contrainte

$$x_1 \leq \left\lfloor \frac{11}{5} \right\rfloor = 2,$$

et d'autre part

$$x_1 \geq \left\lceil \frac{11}{5} \right\rceil = 3.$$

Pour le sous-problème avec la contrainte supplémentaire $x_1 \leq 2$, la solution du problème relaxé est $x_1^* = 2$, $x_2^* = 2$, avec une valeur de la fonction objectif égale à 10. La solution graphique est illustrée sur la Figure 3. Il s'agit d'une solution admissible pour le problème puisque toutes les variables sont entières. La borne supérieure est donc mise à jour et vaut 10.

Pour le sous-problème avec la contrainte supplémentaire $x_1 \geq 3$, la solution du problème relaxé est $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4/3$, avec une valeur de la fonction objectif égale à 10. La solution graphique est illustrée sur la Figure 4. Cette borne inférieure n'étant pas inférieure à la borne supérieure (10). Nous n'avons pas besoin de brancher sur x_2 .

On a trouvé la solution au problème : $(2, 2)$, avec la valeur optimale 10.

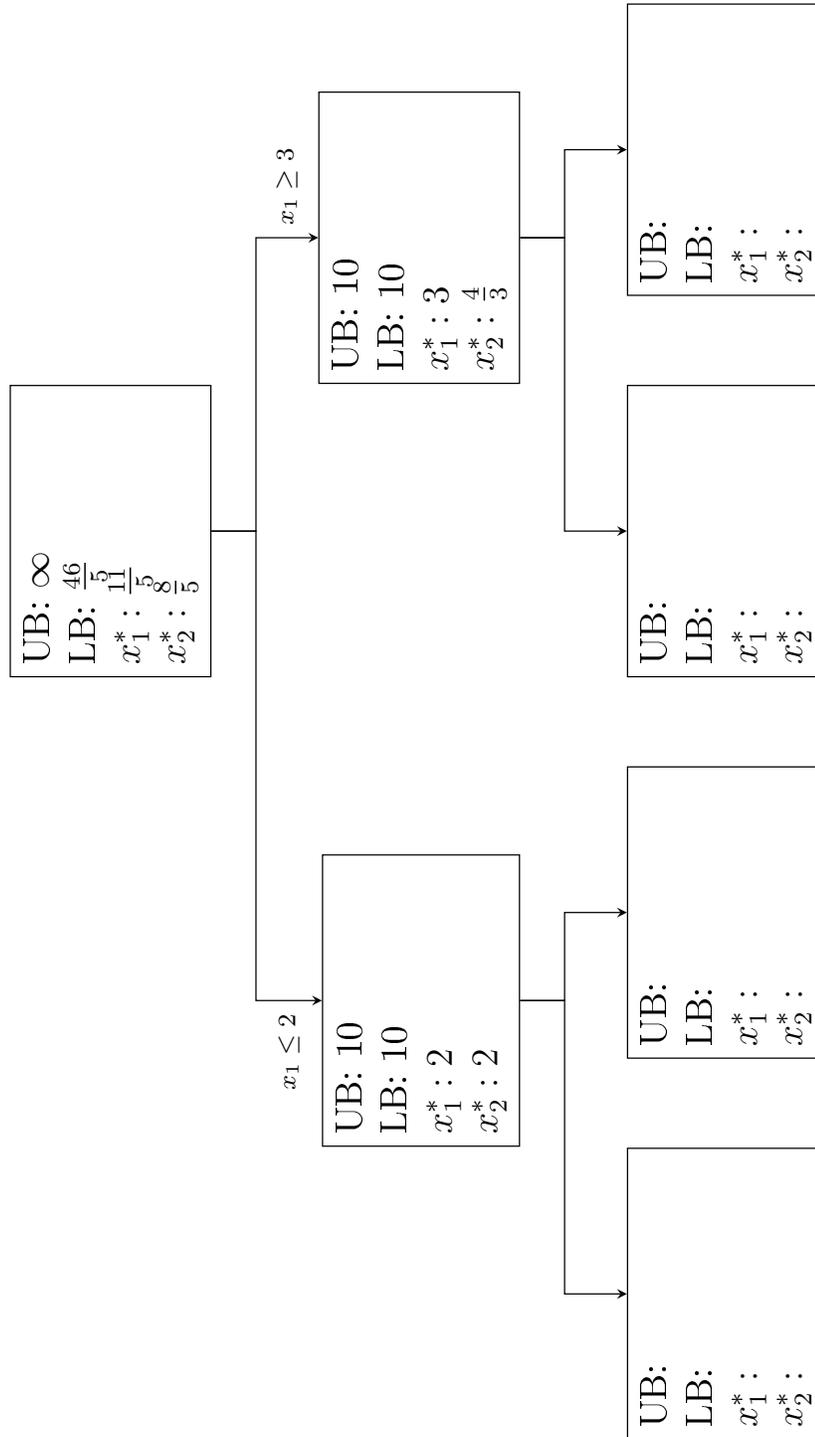


FIGURE 1 – Arbre de Branch & Bound

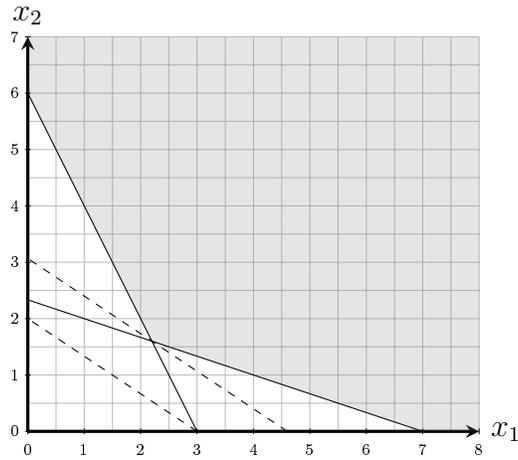


FIGURE 2 – Solution graphique du problème relaxé initial

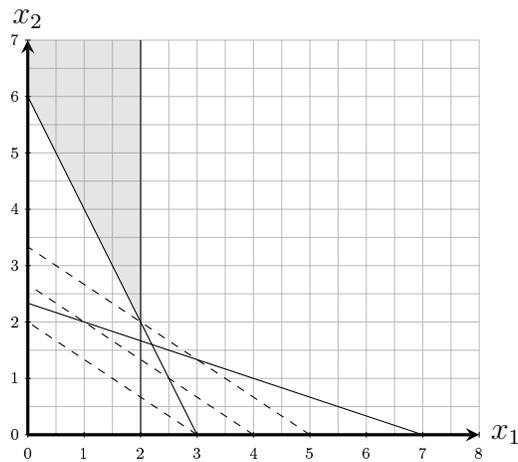


FIGURE 3 – Nouveau domaine avec $x_1 \leq 2$

Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Virginie Lurkin et Nikola Obrenovic

Optimisation en nombres entiers (1 décembre 2017)

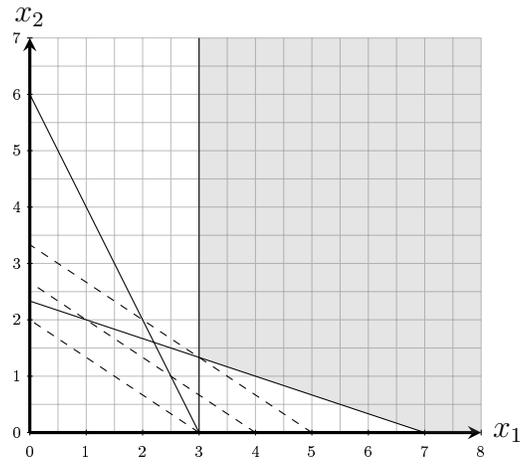


FIGURE 4 – Nouveau domaine avec $x_1 \geq 3$

Solution de la question 2:

1. Si x_1 représente le nombre d'avions du premier type, et x_2 le nombre d'avions du deuxième type, les contraintes s'écrivent :

$$180x_1 + 300x_2 \geq 1000 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 6 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N} \quad (3)$$

2. La région admissible du problème relaxé est représentée en gris sur la Figure 5.

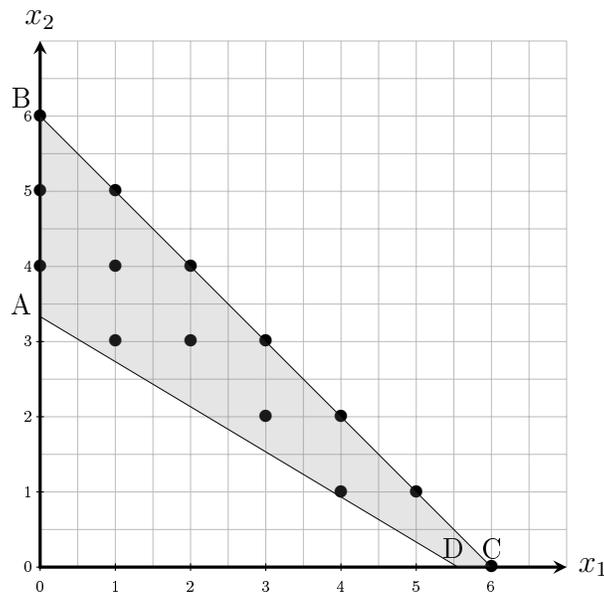


FIGURE 5 – Domaine admissible

3. Les solutions admissibles sont :

- $(0,6)$; $(0,5)$; $(0,4)$; $(1,5)$; $(1,4)$; $(1,3)$; $(2,4)$;
- $(2,3)$; $(3,2)$; $(3,3)$; $(4,1)$; $(4,2)$; $(5,1)$; $(6,0)$;

4. Afin de définir un polyèdre dont les sommets correspondent à des entiers, les contraintes sont modifiées comme suit :

$$x_1 + x_2 \geq 4 \quad (4)$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6 \quad (5)$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 11 \quad (6)$$

$$x_1 + x_2 \leq 6 \quad (7)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N} \quad (8)$$

La nouvelle région admissible du problème relaxé est représentée en gris sur la Figure 6.

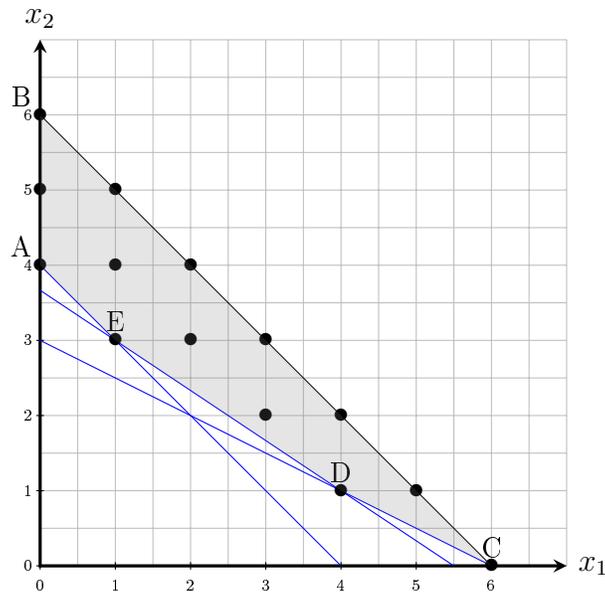


FIGURE 6 – Domaine admissible

Solution de la question 3:

Pour calculer une borne supérieure, il suffit de considérer une affectation arbitraire. Par exemple, $1 \rightarrow A, 2 \rightarrow C, 3 \rightarrow D, 4 \rightarrow B, 5 \rightarrow E$. Le coût total de cette affectation est $43+27+33+45+21 = 169$. Nous obtenons donc $f^* = 169$.

Appelons le problème P . Il est aisé de calculer une bonne inférieure pour P .

1. Le coût minimum pour la personne 1 est 43.
2. Le coût minimum pour la personne 2 est 20.
3. Le coût minimum pour la personne 3 est 33.
4. Le coût minimum pour la personne 4 est 27.
5. Le coût minimum pour la personne 5 est 21.

Dès lors, le coût total ne peut pas être inférieur à $43 + 20 + 33 + 27 + 21 = 144$ et $\ell(P) = 144$.

Nous séparons maintenant le problème P en 5 sous-problèmes. Pour chacun d'eux, nous fixons l'affectation d'un objet à l'acheteur 1, et recalculons la borne inférieure.

$$[P_A] \quad 1 \rightarrow A. \ell(P_A) = 43 + 20 + 33 + 27 + 21 = 144.$$

$$[P_B] \quad 1 \rightarrow B. \ell(P_B) = 70 + 20 + 33 + 27 + 21 = 171. \text{ Comme } 171 \geq f^* = 169, \text{ nous supprimons ce sous-problème.}$$

$$[P_C] \quad 1 \rightarrow C. \ell(P_C) = 73 + 20 + 33 + 27 + 21 = 174. \text{ A nouveau, } 174 \geq f^* = 169, \text{ et nous supprimons ce sous problème.}$$

$$[P_D] \quad 1 \rightarrow D. \ell(P_D) = 65 + 20 + 45 + 45 + 21 = 196. \text{ Sous-problème supprimé.}$$

$$[P_E] \quad 1 \rightarrow E. \ell(P_E) = 57 + 27 + 33 + 27 + 31 = 175. \text{ Sous-problème supprimé.}$$

Tous les sous-problèmes ont été supprimés, sauf P_A . Nous le décomposons à nouveau, en affectant un objet à l'ouvrier 2.

Professeur : Michel Bierlaire, Assistants responsables : Virginie Lurkin et Nikola Obrenovic

Optimisation en nombres entiers (1 décembre 2017)

$[P_{AB}] \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow B. \ell(P_{AB}) = 43 + 84 + 33 + 27 + 21 = 208 \geq f^*.$
Sous-problème supprimé.

$[P_{AC}] \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow C. \ell(P_{AC}) = 43 + 27 + 33 + 27 + 21 = 151.$

$[P_{AD}] \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow D. \ell(P_{AD}) = 43 + 92 + 45 + 45 + 21 = 246 \geq f^*.$
Sous-problème supprimé.

$[P_{AE}] \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow E. \ell(P_{AE}) = 43 + 20 + 33 + 27 + 31 = 154.$

Restent les sous-problèmes P_{AC} et P_{AE} . Traitons d'abord P_{AE} , et affectons un objet à la troisième personne.

$[P_{AEB}] \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow E, 3 \rightarrow B. \ell(P_{AEB}) = 43 + 20 + 52 + 27 + 31 = 173.$
Sous-problème supprimé.

$[P_{AEC}] \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow E, 3 \rightarrow C. \ell(P_{AEC}) = 43 + 20 + 61 + 27 + 34 = 185 \geq f^*.$
Sous-problème supprimé.

$[P_{AED}] \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow E, 3 \rightarrow D. \ell(P_{AED}) = 43 + 20 + 33 + 45 + 31 = 172 \geq f^*.$
Sous-problème supprimé.

Il reste les sous-problèmes P_{AC} .

$[P_{ACB}] \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow C, 3 \rightarrow B. \ell(P_{ACB}) = 43 + 27 + 52 + 27 + 21 = 170.$
Sous-problème supprimé.

$[P_{ACD}] \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow C, 3 \rightarrow D. \ell(P_{ACD}) = 43 + 27 + 33 + 45 + 21 = 169.$

$[P_{ACE}] \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow C, 3 \rightarrow E. \ell(P_{ACE}) = 43 + 27 + 45 + 27 + 34 = 176 \geq f^*.$
Sous-problème supprimé.

Le seul sous-problème restant est P_{ACD} . Affectons maintenant un objet au quatrième acheteur (et donc, automatiquement, au cinquième aussi).

$[P_{ACDB}] \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow C, 3 \rightarrow D, 4 \rightarrow B. \ell(P_{ACDB}) = 43 + 27 + 33 + 45 + 21 = 169.$
Il s'agit d'une solution admissible. Comme $f^* > 144$, nous mettons à jour la borne supérieure $f^* = 169$.

$P_{ACDE} \ 1 \rightarrow A, 2 \rightarrow C, 3 \rightarrow D, 4 \rightarrow E. \ell P_{ACDE} = 43 + 27 + 33 + 51 + 34 = 188 > f^* = 169.$ Sous-problème supprimé.

L'affectation optimale est donc la solution du sous-problème P_{ACDB} , c'est-à-dire : $1 \rightarrow A, 2 \rightarrow C, 3 \rightarrow D, 4 \rightarrow B, 5 \rightarrow E$. Le coût optimal est 169.

Solution de la question 4:

Chaque décision est modélisée par une variable binaire x_i qui vaut 1 si l'étudiant i est engagé, et 0 sinon.

Voici l'équation pour chacune des contraintes :

- (a) Au moins deux candidats doivent être choisis.

$$\sum_i x_i \geq 2$$

- (b) Maximum 3 assistants peuvent être pris pour le cours.

$$\sum_i x_i \leq 3$$

- (c) Au moins un assistant doit parler couramment français.

$$x_1 + x_2 + x_4 \geq 1$$

- (d) Eva ne souhaite être assistante que si Meri ou Marija l'est également.

$$x_3 - x_5 - x_6 \leq 0$$

- (e) Riccardo ne peut pas être choisi si Anna est choisie.

$$x_7 + x_2 - 1 \leq 0$$

- (f) Au moins un assistant doit avoir de l'expérience dans le cours.

$$x_4 + x_8 \geq 1$$